Un corrigé de l'épreuve de rattrapage

Exercice 1: (3 points)
Détermier les nombres réels strictement positifs *a, b, et c tels que l'ellipsoïde d'équation*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

passe par le point $(1,2,2)$ et que son volume V ($V=4\pi abc$) soit minimal.

Corrigé:

(1pt) Pour trouver les paramètres a, b, c requis, on étudie les extrema liés de la fonction f / $f(a,b,c)=4\pi abc$ sous la contrainte $g(a,b,c)=0$ où $g(a,b,c)=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{4}{c^2}-1$.
Remarquons au préalable que vu la nature géometrique du problème, il y aura un minimum et pas de maximum.
(2pts) Utilisons la méthode de Lagrange, on résoud le systeme suivant:

$$\begin{cases} \nabla\left(f+\lambda g\right)(a,b,c)=0 \\ g(a,b,c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4bc-\dfrac{2\lambda}{a^3}=0 \\ 4ac-\dfrac{8\lambda}{b^3}=0 \\ 4ab-\dfrac{8\lambda}{c^3}=0 \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{4}{c^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^3bc=\lambda & (1) \\ acb^3=2\lambda & (2) \\ abc^3=2\lambda & (3) \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{4}{c^2}=1 & (4) \end{cases}$$

De (1) et (2) on aura $4a^3bc=acb^3$, i.e. $2a=b$
De (2) et (3) on aura $acb^3=abc^3$, i.e. $b=c$ et donc $b=c=2a$.
En remplaçant dans (4) on aura $a^2=3$, i.e. $a=\sqrt{3}$.
On en conclut que $(a,b,c)=\left(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)$ et $\mathbf{V}=48\sqrt{3}\pi$.

Exercice 2: (3 points)
Soit le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y\geq -2x,\ y\geq 2x^2, y\leq x^2+1,\ x\leq\frac{1}{2}\right\}.$$

Représenter géométriquement le domaine D puis calculer son aire.

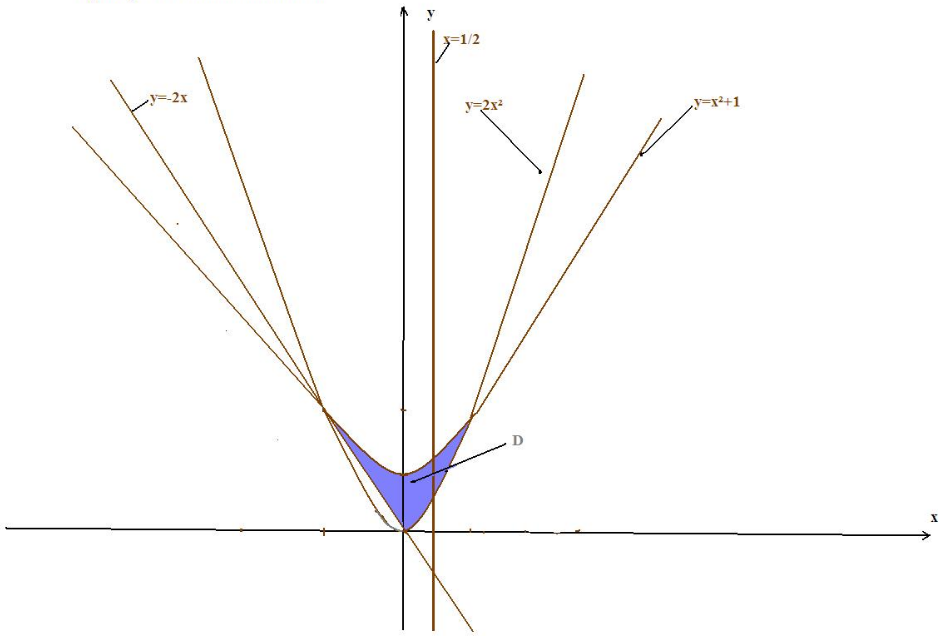
Corrigé:

(1 pt) Représentation graphique:

Points d'intersection: $\begin{cases} y=-2x \\ y=2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\begin{cases} y=2x \\ y=x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} y=2x^2 \\ y=x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Fig. Représentation du domaine D



(2pts) Calcul de l'aire de D: On a $Aire\,(D) = \iint\limits_{D} dxdy$.

D'aprés le graphique,on a $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leq \ x \leq \frac{1}{2}, \ \varphi(x) \leq y \leq x^2 + 1\right\}$ où $\varphi(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad -1 \leq \ x \leq 0 \\ 2x^2 & \text{si} \quad 0 \leq \ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

D'aprés le théorème de Fubini on a $Aire\,(D) = \int\limits_{-1}^{1/2} \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{x^2+1} dy \right) dx$, i.e.

$Aire\,(D) = \int\limits_{-1}^{0} \left(\int\limits_{-2x}^{x^2+1} dy \right) dx + \int\limits_{0}^{1/2} \left(\int\limits_{2x^2}^{x^2+1} dy \right) dx = \int\limits_{-1}^{0} (x+1)^2 \, dx + \int\limits_{0}^{1/2} \left(1 - x^2\right) dx$

D'où $\quad Aire\,(D) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{11}{24} = \dfrac{19}{24}$.

Exercice 3:(3 points)

Etudier, selon les valeurs du paramètre réel α,la nature de la série numérique

$$\sum_n \frac{n^{2\alpha}}{\alpha^n + \log n}, \qquad \alpha > 0$$

Corrigé: Posons $U_n = \dfrac{n^{2\alpha}}{\alpha^n + \log n}$, $U_n > 0$.

<u>Cas 1</u>: $0 < \alpha \leq 1$**(1.5 pts)**

On a $\alpha^n + \log n = (\log n) \left(1 + \dfrac{\alpha^n}{\log n}\right)$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\alpha^n}{\log n} = 0$ d'où $U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^{2\alpha}}{\log n}$;

or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{2\alpha}}{\log n}=+\infty$ car $\alpha>0$ (Croissances comparées) et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n\neq 0$ d'où la divergence grossière de $\sum\limits_n U_n$.

<u>Cas 2</u>: $\alpha>1$**(1.5 pts)**

On a $\alpha^n+\log n=\alpha^n\left(1+\dfrac{\log n}{\alpha^n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{\alpha^n}=0$ (Croissances comparées)

d'où $U_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{n^{2\alpha}}{\alpha^n}=n^{2\alpha}e^{(-\log\alpha)n}$; or la série $\sum\limits_n n^{2\alpha}e^{-(\log\alpha)n}$cv car $\log\alpha>0$.

On a donc $U_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{n^{2\alpha}}{\alpha^n}>0$, $\sum\limits_n\dfrac{n^{2\alpha}}{\alpha^n}$cv, d'où la convergence de $\sum\limits_n U_n$ (CE).

On en conclut que $\sum\limits_n U_n$ cv ssi $\alpha>1$.

Exercice 4: (8 points)

Soit la fonction F définie par l'intégrale généralisée

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\log(x^2+t^2)}{1+t^2}dt,\qquad x\geq 0.$$

1) Montrer que F est continue dans $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que $F\in C^1\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ puis calculer $F'(x)$ pour $x>0$.
3) Calculer $F(0)$ (Considérer le changement de variable $u=\dfrac{1}{t}$).
4) Déduire de ce qui précède l'expression de $F(x)$.

Corrigé: Posons $f(x,t)=\dfrac{\log(x^2+t^2)}{1+t^2}$, $(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}_+^*$.

(2 pts) 1) Continuité de F :

On a f continue dans $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}_+^*$.

Soit $\alpha>0$, voyons la cv uniforme de $\int_0^{+\infty}f(x,t)\,dt$ dans $[0,\alpha]$.

$|f(x,t)|=\left|2\dfrac{\log t}{1+t^2}+\dfrac{\log(1+\frac{x^2}{t^2})}{1+t^2}\right|\leq 2\dfrac{|\log t|}{1+t^2}+\dfrac{\log(1+\frac{x^2}{t^2})}{1+t^2}$

$|f(x,t)|\ \leq 2\dfrac{|\log t|}{1+t^2}+\dfrac{\log(1+\frac{\alpha^2}{t^2})}{1+t^2}$ pour $0\leq x\leq\alpha$. **(0.5pt)**

Posons $g(t)=2\dfrac{|\log t|}{1+t^2}+\dfrac{\log(1+\frac{\alpha^2}{t^2})}{1+t^2}$ et montrons la convergence de $\int_0^{+\infty}g(t)\,dt$.

Pb en 0^+ et $+\infty$

(0.5pt) Au V(0) : $g(t)\underset{0}{\sim}-2\log t+\log(1+\frac{a^2}{t^2})=-4\log t+\log a^2+\log\left(1+\dfrac{t^2}{a^2}\right)$

$=-4\log t\left(1+\dfrac{\log a^2+\log\left(1+\dfrac{t^2}{a^2}\right)}{-4\log t}\right)\underset{0}{\sim}-4\log t>0;$

(0.5 pt) Au V($+\infty$) : $g(t)=2\dfrac{\log t}{1+t^2}\left(1+\dfrac{\log(1+\frac{\alpha^2}{t^2})}{\log t}\right)\underset{+\infty}{\sim}2\dfrac{\log t}{1+t^2}\underset{+\infty}{\sim}$

$2\dfrac{\log t}{t^2}>0.$

Comme $\int_0^c \log t dt$ et $\int_{c'}^{+\infty} \frac{\log t}{t^2} dt$ cv (intégrales de Bertrand) alors $\int_0^{+\infty} g(t)\, dt$ cv par le critère d'équivalence.

(0.25 pt) On a donc $|f(x,t)| \leq g(t)$ dans $[0,\alpha] \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $\int_0^{+\infty} g(t)\, dt$ cv, ce qui assure la convergence uniforme de $\int_0^{+\infty} f(x,t)\, dt$ dans $[0,\alpha]$ ..

(0.5pt) CCL: On a f continue dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^*$ et $\int_0^{+\infty} f(x,t)\, dt$ cv uniformément dans $[0,\alpha]$, $\alpha > 0$ qcq, alors F est continue dans $\mathbb{R}^+$.

(1.75 pts) 2) a) Dérivabilité de F dans $\mathbb{R}_+^*$:

$f \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$.

Soit $\alpha,\ \beta > 0$, vérifions la convergence uniforme de $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$ dans $[\alpha,\beta]$:

On a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2\beta}{(1+t^2)(\alpha^2+t^2)}$, pour $(x,t) \in [\alpha,\beta] \times \mathbb{R}_*^+$.**(0.5 pt)**

Posons $h(t) = \frac{2\beta}{(1+t^2)(\alpha^2+t^2)} > 0$, $\int_0^{+\infty} h(t)\, dt$ admet un problème au V$(+\infty)$.

On a $h(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\beta}{t^4}$, $\int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^4} dt$ cv (Rieman), i.e. $\int_0^{+\infty} h(t)\, dt$ cv (CE). **(0.5 pt)**

On a donc $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq h(t)$ dans $[\alpha,\beta] \times \mathbb{R}_+^*$ et $\int_0^{+\infty} h(t)\, dt$ cv, d'où la convergence uniforme de $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$ dans $[\alpha,\beta]$.**(0.25 pt)**

(0.5 pt) CCL: $f \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+)$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$ cv uniformément dans $[\alpha,\beta]$, or α et β sont quelconques dans $\mathbb{R}_*^+$ alors $F \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$ et on a

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

(2 pts) b) Calcul de $F'(x)$: On a $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)} dt$.

Pour $x \neq 1$, on décompose la fraction rationnelle: **(1 pt)** On cherche a, b, c, d /

$$\frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{at+b}{(1+t^2)} + \frac{ct+d}{(x^2+t^2)}$$

Comme il y a parité alors $a = c = 0$.

A $t = 0$, on aura $b = \frac{2}{x} - \frac{d}{x^2}$ et à $t = 1$, on aura $b = 2\left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{d}{x^2+1}\right)$.

Soit $\frac{2}{x} - \frac{d}{x^2} = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2d}{x^2+1}$ ce qui donne $d\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{(x^2+1)}\right) = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}$

i.e. $d\left(\frac{1-x^2}{x^2(x^2+1)}\right) = \frac{2x}{x^2(x^2+1)}$, d'où

$d = \frac{2x}{1-x^2}$, $b = \frac{2x}{x^2+1}\left(1 - \frac{2}{1-x^2}\right) = \frac{-2x}{1-x^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2x}{1-x^2}\left(\frac{-1}{(1+t^2)} + \frac{1}{(x^2+t^2)}\right)$.

$F'(x) = \frac{2x}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{-1}{(1+t^2)} + \frac{1}{(x^2+t^2)}\right) dt = \frac{2x}{1-x^2}\left(\left[-Arctgt + \frac{1}{x} Arctg \frac{t}{x}\right]_0^{+\infty}\right)$

On a donc $F'(x) == \dfrac{\pi}{1-x^2}(1-x) = \dfrac{\pi}{1+x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.**(1 pt)**
Cette égalité reste valable en $x = 1$ grâce à la continuité de F' en $x = 1$. **(0.5 pt)**

(1 pt) 3) Calcul de $F(0)$: On a $F(0) = 2\int_0^{+\infty} \dfrac{\log t}{(1+t^2)\,t^2}.dt$.

On pose $u = \dfrac{1}{t}$, *i.e.* $dt = -\dfrac{du}{u^2}$, on aura $F(0) = -2\int_0^{+\infty.} \dfrac{\log u}{(1+u^2)\,u^2}du$, i.e. $F(0) = -F(0)$ et donc $F(0) = 0$.

(1 pt) 4) Déduction de l'expression de $F(x)$ pour $x \geq 0$:
On a $F'(x) = \dfrac{\pi}{1+x}$ pour $x > 0$ donc $F(x) = \pi \log(1+x) + C$ pour $x > 0,\ C$ étant une constante.
Par ailleurs, F est continue dans $\mathbb{R}^+$ donc $F(0) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} F(x) = C$. D'où

$$F(x) = \pi \log(1+x)$$

Exercice 5:(3 points)
Soit la fonction 2π-periodique paire définie dans $[0,\pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \leq \pi \end{cases}$$

Développer f en série de Fourier (Calculer la série de Fourier et étudier sa convergence).

Corrigé:

Sur $[0,\pi]$, la fonction f est continue par morceaux (polynomiae sur $[0,1]$ et sur $[1,\pi]$) et elle y est bornée $(0 \leq f(x) \leq 1)$, il en sera donc de même sur $[-\pi,\pi]$ par parité; de plus elle est monotone par tranches; on en conclut que f admet une série de Fourier $F(f)$ qui converge simplement dans $\mathbb{R}$ vers f. **(1 pt)**

La série de Fourier associée à f est de la forme $F(f) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,

f étant paire alors $b_n = 0$ **(0.5 pt)** et $a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^1 x \cos nx\, dx$.

On a $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\int_0^1 x\, dx = \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\pi}$**(0.5 pt)**

Pour $n \geq 1$, on procède par IPP:

$$\int_0^1 x\cos nx\, dx = \left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \sin nx\, dx. \quad \left(\begin{cases} u = x \\ v' = \cos nx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{cases} \right)$$

$$= \frac{\sin n}{n} + \frac{1}{n^2}[\cos nx]_0^1 = \frac{\sin n}{n} + \frac{\cos n}{n^2} - \frac{1}{n^2}.\textbf{(1pt)}$$

i.e. $a_0 = \dfrac{1}{\pi},\ a_n = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\sin n}{n} + \dfrac{\cos n}{n^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$ et $F(f) = \dfrac{1}{2\pi} + \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{\sin n}{n} + \dfrac{\cos n}{n^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)\cos nx$.

& Saha aïdkom
N. ZAÏDI